DS de mathématiques n°7

Bataille Corsée – Corrigé

DS non noté.

1) Inès et Pascal essaient les différentes règles du jeu suivantes. Pour chacune de ces règles, quel est le plus grand nombre de points qu'Inès peut s'assurer de marquer ? On pourra commencer par étudier de petites valeurs de n.

a) Inès commence à chaque tour.

Si Inès commence chaque tour, elle ne marquera aucun point. En effet, si elle joue une carte de valeur k (impair), Pascal jouera sa carte de valeur $k+1$ et remportera le point. Ainsi, le score final d'Inès est $\boxed{0 \text{ point}}$.

b) Pascal commence à chaque tour.

Si Pascal commence chaque tour, la meilleure stratégie d'Inès est la suivante :

- Lorsque Pascal joue sa carte de valeur $2n$, Inès joue sa carte de valeur 1 : c'est le mieux à faire car elle ne pourra jamais gagner contre cette carte. Pascal remporte le point.
- Lorsque Pascal joue une carte de valeur k avec $k \leq 2n-2$, alors Inès joue sa carte de valeur $k+1$, de sorte qu'Inès remporte le point. Il y a $n-1$ tours de cette sorte. Ainsi, le score final d'Inès est $\boxed{n-1 \text{ points}}$.

c) Inès commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de *perdre* un point commence.

Pascal peut appliquer la même stratégie qu'à la question a), car Inès perdra à chaque tour donc sera toujours forcée de commencer. Ainsi, Inès marquera $\boxed{0 \text{ point}}$.

d) Même chose, mais Pascal commence au premier tour.

Note : on donne ici une justification très approfondie. Il n'était pas nécessaire d'aller jusque-là sur la copie.
Pascal peut tenter deux stratégies différentes :

Stratégie A : Jouer une carte de valeur non maximale (tant qu'il lui reste au moins deux cartes). On suppsose par l'absurde que la stratégie **A** décrite ci-dessus est la meilleure pour Pascal. Si Pascal joue par exemple un 4 (avec $4 < 2n$), Inès peut en particulier jouer son 5 (il y a d'autres coups possibles mais celui-là suffira pour obtenir une contradiction) et gagne le point. C'est à Pascal de commencer. La répartition des cartes est alors $(1, 3, 7, 9, \cdots, 2n-1)$ pour Inès et $(2, 6, 8, 10, \cdots, 2n)$ pour Pascal.

Cependant, on remarque que le 6 de Pascal possède, *in fine*, autant de valeur qu'un 4 : il gagne contre le 1 et le 3 d'Inès, et perd contre les autres cartes d'Inès. Donc on peut remplacer ce 6 par un 4 et considérer la répartition suivante, dite *équivalente* : $(1, 3, 7, 9, \cdots, 2n-1)$ pour Inès et $(2, 4, 8, 10, \cdots, 2n)$ pour Pascal. Mais alors, le 7 d'Inès a la même valeur qu'un 5, donc on obtient les répartitions équivalentes $(1, 3, 5, 9, \cdots, 2n-1)$ et $(2, 4, 8, 10, \cdots, 2n)$. Et ainsi de suite.

Finalement, on obtient les répartitions équivalentes $(1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-3)$ pour Inès et $(2, 4, 6, 8, \cdots, 2n-2)$ pour Pascal, et ce quelle que soit la première carte jouée par Pascal (4, 2, etc.). C'est encore à Pascal de jouer et tout se passe comme si n est devenu $n-1$, et qu'Inès avait gagné un point. Si **A** était la meilleure stratégie pour Pascal, Inès gagnerait tous les points sauf le dernier où Pascal jouerait son $2n$ et Inès son 1. Dans ce cas, Inès gagnerait $n-1$ points et Pascal 1 point. Si $n \geq 2$, on va justifier que la stratégie **A** n'est pas la meilleure pour Pascal en étudiant une seconde stratégie.

Stratégie B : Jouer la carte la plus forte. Pascal joue sa carte $2n$ afin de gagner à coup sûr le premier tour. Inès jouera alors son 1 : c'est son meilleur choix car $2n$ est la carte la plus forte. Pascal marque 1 point et c'est à Inès de jouer.

À cet instant, les cartes sont réparties ainsi : $(3, 5, 7, \cdots, 2n-1)$ pour Inès et $(2, 4, 6, \cdots, 2n-2)$ pour Pascal. On remarque que cette répartition est équivalente à $(2, 4, 6, \cdots, 2n-2)$ pour *Inès* et $(1, 3, 5, \cdots, 2n-3)$ pour *Pascal*. De plus c'est à Inès de jouer. Ainsi, tout se passe comme si Inès et Pascal avaient échangé leurs rôles : Inès se retrouve dans la même configuration que Pascal au début de la partie. Si la stratégie **B** est la meilleure pour Pascal, elle est également la même pour Inès : elle doit jouer sa meilleure carte.

Ainsi, en repartant des répartitions $(3, 5, 7, \cdots, 2n-1)$ pour Inès et $(2, 4, 6, \cdots, 2n-2)$ pour Pascal, Inès jouera son $2n-1$, et Pascal jouera son 2. Inès remporte le point et c'est à Pascal de jouer. Pascal retombe sur la configuration initiale, et va donc jouer son $2n-2$, etc. On en déduit que les n points de la partie sont distribués ainsi : Pascal, puis Inès, puis Pascal, puis Inès, etc. Si n est pair, Inès marquera $\dfrac{n}{2}$ points. Si n est impair, Inès marquera $\dfrac{n-1}{2}$ points. Finalement, Inès marquera $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ points.

La stratégie **B** est clairement la meilleure pour Pascal comme pour Inès. Ainsi, Inès marquera $\boxed{\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

e) Inès commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de *gagner* un point commence.

À cette question et la suivante, il devient encore plus long de réaliser une justification détaillée (bien que ce soit possible). On donnera donc des arguments plus "bancals" et moins rigoureux.

Lors d'un même tour, un joueur doit, dans l'idéal : **I.** gagner le tour (marquer un point contribue à faire le meilleur score possible) et d'autre part **II.** faire en sorte de jouer en deuxième au tour suivant (car il pourra s'adapter à ce que joue son adversaire pour gagner ce tour, sauf si aucune de ses cartes ne peut gagner contre celle de l'adversaire). Avec la règle de cette question **e)** , réussir **II.** revient à perdre le tour donc à faire le contraire de **I.** On ne peut donc pas réussir les stratégies **I.** et **II.** en même temps. Toutefois, si on reformule la situation :

- **I.** revient à marquer un point et prendre le risque de ne pas gagner au prochain tour (car on commencera à jouer)
- **II.** revient à perdre un point et espérer gagner le point suivant (car l'adversaire jouera en premier).

Il semble donc intuitif (mais pas vraiment rigoureux) de se dire que la stratégie **I.** est plus efficace que **II.**, après tout un tiens vaut mieux que deux tu l'auras... Sur la base de cette prémisse, on supposera donc que Pascal et Inès appliqueront la stratégie **I.** et chercheront à gagner un tour lorsqu'ils le peuvent.

Inès joue en premier. Elle ne gagnera pas le premier tour car Pascal jouera en second. Elle joue par exemple son 1 et Pascal gagnera avec son 2 (mais par le jeu des représentations équivalentes, si Inès joue une autre carte que 1, cela reviendrait au même). Pascal commence ensuite. S'il joue sa carte la plus forte, $2n$, Inès sacrifiera son 3, et donc ce $2n$ n'aura pas été très "rentable". Pascal peut tout aussi bien le garder et jouer une carte de valeur non maximale, par exemple 4, qu'Inès gagnera avec son 5. Après ces deux premières manches, Inès aura les cartes $(1, 7, 9, \cdots, 2n-1)$ et Pascal aura les cartes $(6, 8, 10, \cdots, 2n)$.

Or, le 1 d'Inès est équivalent à un 5. Au final, on peut considérer qu'Inès et Pascal ont les cartes $(5, 7, \cdots, 2n-1)$ et $(6, 8, \cdots, 2n)$ respectivement. Pascal a gagné un point, puis Inès. C'est à nouveau à Inès de jouer. On se retrouve dans la même situation que celle de départ avec 4 cartes de moins. La situation continue en enlevant les cartes des deux mains 4 par 4, jusqu'à ce qu'on arrive vers la fin, où on distingue deux cas :

- Si n est pair, alors le nombre total de cartes, $2n$ est divisible par 4. Comme les cartes sont jouées "4 par 4", il finira par ne rester plus que 4 cartes. On peut alors supposer que les cartes restantes, par les représentations équivalentes, seront $(1, 3)$ pour Inès et $(2, 4)$ pour Pascal, avec Inès qui commence. Dans ce cas, on constate qu'Inès perdra les deux dernières manches : sur les n points, seuls $n-2$ ont été partagées équitablement entre elle et Pascal : Inès marquera donc $\dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n}{2} - 1$ points.
- Si n est impair, alors le nombre total de cartes, $2n$ n'est pas divisible par 4. Comme les cartes sont jouées "4 par 4", il finira par ne rester plus que 2 cartes. On peut supposer que les cartes restantes, par les représentations équivalentes, seront (1) pour Inès et (2) pour Pascal, avec Inès qui commence. Dans ce cas, Inès perdra cette manche : sur les n points, seuls $n-1$ ont été partagées équitablement entre elle et Pascal : Inès marquera donc $\dfrac{n-1}{2}$ points.

En combinant les deux cas, on peut conclure que Inès marquera $\boxed{\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

f) Même chose, mais Pascal commence au premier tour.

Pour les raisons évoquées précédemment, Pascal va chercher à gagner le pli à tout prix en appliquant la stratégie **I.** Pascal jouera donc son $2n$, gagnant le pli contre le 1 d'Inès, et Inès jouera ensuite son $2n-1$, gagnant le pli contre le 2 de Pascal. Ainsi, toutes les deux manches, Inès et Pascal perdent leur plus faible et leur plus forte cartes.

- Si n est pair, le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste que 4 cartes, avec Pascal qui commence. Par les représentations équivalentes, c'est comme si Inès avait les cartes $(1, 3)$ et si Pascal avait les cartes $(2, 4)$. Comme Pascal commence, cette fois Inès gagne un point, si bien qu'Inès gagne $\dfrac{n}{2}$ points.
- Si n est impair, le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste que 2 cartes, avec Pascal qui commence. Par les représentations équivalentes, c'est comme si les cartes restantes étaient 1 et 2. Pascal gagne le dernier pli, et donc Inès n'aura gagné que $\dfrac{n-1}{2}$ points.

En combinant les deux cas, on peut conclure que Inès marquera $\boxed{\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

2) Pour rendre le jeu équitable, les deux joueurs modifient les cartes. Désormais, chaque joueur possède initialement n cartes numérotées de 1 à n. Pour éviter les égalités sur un même pli (par exemple chaque joueur joue un 1), on ajoute la règle suivante : à chaque tour, le second à jouer n'a pas le droit de jouer une carte de même valeur que la carte du premier. Si c'est le dernier tour et que le second joueur n'a pas le choix, le dernier point n'est pas attribué. Reprendre la question **1)** dans ce cadre, avec les différentes règles.

a) Inès commence à chaque tour. Pascal appliquera la stratégie suivante : si Inès met une carte de valeur $k < n$, alors Pascal mettra sa carte de valeur $k+1$ pour la battre. Si Inès joue sa carte n, alors Pascal jouera son 1. Cette stratégie assure à Pascal $n-1$ points, c'est le meilleur score qu'il puisse faire puisque Pascal ne pourra pas gagner de point contre la carte n. Finalement, Inès gagnera uniquement $\boxed{1 \text{ point}}$.

b) La situation de cette sous-question est symétrique à la sous-question précédente : en effet Pascal et Inès ont les mêmes jeux de cartes et si Pascal commence à chaque tour, c'est Inès qui gagnera $\boxed{n-1 \text{ points}}$.

c) On comprend aisément que dans ce cadre, gagner un tour possède un double avantage (gain de point et l'adversaire commencera, ici les stratégies **I.** et **II.** sont compatibles). La meilleure stratégie pour Inès est de gagner le premier tour avec la carte n contre la carte 1 de Pascal, pour forcer ce dernier à commencer. À son tour, Pascal joue son n et Inès jouera son 1. Puis Inès joue son $n-1$ et Pascal son 2, puis Pascal son $n-1$ et Inès son 2, etc. Les points s'alternent donc selon le schéma Inès, Pascal, Inès, Pascal, etc.

Si n est pair, chaque joueur gagne $\dfrac{n}{2}$ points. Si n est impair, i.e. $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors le dernier tour se fera avec la carte p contre la carte p de chaque côté et le dernier point n'est pas attribué. Finalement chaque joueur gagnera $\boxed{\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

d) Comme en question **b)** , la situation est symétrique. Inès gagnera donc là encore $\boxed{\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

e) À nouveau, les stratégies **I.** et **II.** semblent en conflit. Regardons ce qu'il se passe si chaque joueur applique la stratégie **I.** (gagner le point dès qu'on le peut) :

	Pli 1	Pli 2	Pli 3	Pli 4	Pli 5	Pli 6	Pli 7
Première carte	Inès n	Inès 1	Pascal n	Pascal n-1	Pascal 3	Inès n-1	Inès n-2
Deuxième carte	Pascal 1	Pascal 2	Inès 2	Inès 3	Inès 4	Pascal 3	Pascal 4
Pli gagné par :	**Inès**	**Pascal**	**Pascal**	**Pascal**	**Inès**	**Inès**	**Inès**

On se rend compte que la stratégie **I.** permet à Inès de gagner un point au premier pli, mais laisse 3 points de plus à Pascal aux plis suivants (qu'elle récupère ensuite sur les plis 5 à 7). La stratégie **I.** est donc efficace à très court terme, mauvaise sur le moyen terme, et neutre sur le long terme... En particulier, si $n = 4$, alors Inès ne gagnerait qu'un point (et Pascal 2, le pli 4 serait une égalité).

Comparons avec ce qui se passerait en adoptant la stratégie **II.**, où on laisse l'adversaire gagner le pli. Inès pourrait commencer à jouer son 1, perdant contre le 2 de Pascal, mais par le jeu des représentations équivalentes, cela revient à jouer son $n-1$ et à perdre contre le n de Pascal. Prenons par exemple $n = 4$:

	Pli 1	Pli 2	Pli 3	Pli 4
Première carte	Inès 3	Pascal 2	Inès 1	Pascal 1
Deuxième carte	Pascal 4	Inès 4	Pascal 3	Inès 2
Pli gagné par :	**Pascal**	**Inès**	**Pascal**	**Inès**

Au second pli, Pascal peut forcer Inès à gagner avec son 4 car elle n'a plus de 3 et son 2 est injouable pour éviter les égalités. On constate que la stratégie **II.** est meilleure que **I.** dans le cas $n = 4$, car meilleure à moyen terme. Prenons maintenant $n = 10$:

	Pli 1	Pli 2	Pli 3	Pli 4
Première carte	Inès 9	Pascal 8	Inès 7	Pascal 6
Deuxième carte	Pascal 10	Inès 10	Pascal 9	Inès 8
Pli gagné par :	**Pascal**	**Inès**	**Pascal**	**Inès**

La partie continue ainsi jusqu'à la fin, et on peut vérifier que quelle que soit la valeur de n, le dernier pli ne sera jamais une égalité. Les points sont distribués successivement à Pascal, puis Inès, puis Pascal, etc. Inès obtiendra donc un score de $\boxed{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

f) À nouveau, la situation est symétrique en échangeant les rôles de Pascal et d'Inès. Or, puisqu'il y a un total de n points et qu'il n'y a pas d'égalité au dernier pli, Inès gagnera $\boxed{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ points}}$.

3) Inès propose une nouvelle répartition des cartes. On joue de nouveau avec des cartes numérotées de 1 à $2n$, mais en changeant la répartition initiale. Plus précisément, Inès veut être sûr de battre Pascal (c'est-à-dire avoir strictement plus de points que lui à la fin de la partie), mais elle veut que la **somme des valeurs** de ses n cartes **soit la plus petite possible**. Avec les différentes règles de la question **1)**, estimer cette somme.

Hoho... C'est dur... À vous de chercher !